

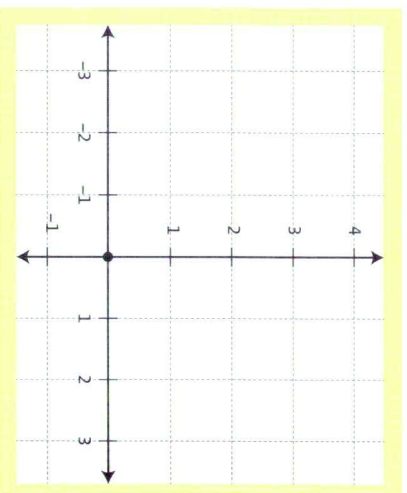
2.1

Concepto y definición de límite

3 Notión intuitiva de límite

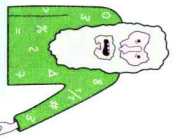
a **COMPLETA** la tabla, grafica la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ y contesta las preguntas.

x	f(x)
1.	-2
2.	-1
3.	0
4.	1
5.	2

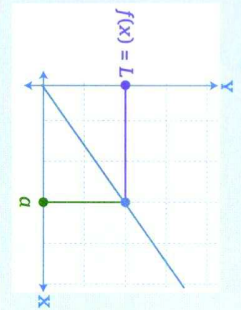


- ¿Cuál es el límite de la función cuando x tiende a 0? _____
- ¿A qué valor se acerca la función con valores muy cercanos a 1? _____

Aprende



Concepto de límite



En matemáticas, el **concepto de límite** formaliza la noción intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una función, a medida que los parámetros de esa función se acercan a determinado valor. Se puede decir que un límite es una noción de ubicación.

El concepto de límite se define como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a , es igual a L , lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Una manera más precisa de formular la definición es:

- Se puede hacer que $f(x)$ sea tan cercana a L como se quiera si x se acerca lo suficiente a a , pero siendo distinta de a .

Si una función es evaluada por la derecha y por la izquierda y el resultado en ambos casos se aproxima al mismo valor, se dice que ese valor es el **límite de la función**.

Para que un límite exista se deben cumplir dos condiciones:

- Que existan límites laterales por la derecha y por la izquierda.
- Que los límites laterales sean iguales.

Límite por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, que se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es L^- .

Límite por la derecha: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, que se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es igual a L^+ .

Para determinar el límite de una función, además de los métodos tabular y gráfico, existen otros métodos aritméticos y algebraicos, tales como sustitución, factorización y racionalización, que permiten calcular el límite por medio del análisis y la descomposición de la función.



Dato a la mano

El signo \rightarrow significa **tiende a**, es decir que el valor de una variable se aproxima a un valor dado.

Ejemplo 01

En un laboratorio se analizó un cultivo de microorganismos siccófilos y se concluyó que su población en miles está dada por la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$, donde x es igual a la temperatura de la muestra en determinado momento.

¿Cuántos microorganismos hay cuando el cultivo está a -3° ?

- Para calcular el límite se evalúa la función con valores de x muy cercanos a -3 por la izquierda y por la derecha considerando dos decimales, ya que mientras más pequeña sea la diferencia entre x y a , el límite se calcula con mayor exactitud.

x	Valores por la izquierda \rightarrow			-3	\leftarrow Valores por la derecha		
$f(x)$	-3.03	-3.02	-3.01	11	10.87	10.74	10.61

- La tabulación permite observar que al evaluar la función con valores cercanos a -3 por la izquierda el valor de $f(x)$ se va aproximando a 11; así mismo, cuando es evaluada por la derecha el valor se aproxima a 11.
- De esta manera, se concluye que $f(x)$ es igual a **11** cuando x tiende a -3 , por lo tanto ese es su límite.



Dato a la mano

Para un mayor rigor matemático se utiliza la definición epsilon-delta de límite:

- El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L si y solo si para todo número real ϵ mayor que cero ($\epsilon > 0$) existe un número real δ mayor que cero ($\delta > 0$) tal que si la distancia entre x y a es menor que δ , entonces la distancia entre la imagen de x y L es menor que ϵ unidades.

Ejemplo 02

La velocidad de un auto deportivo en km/h para un tiempo t en segundos se define por la función:

$$v(t) = \frac{-0.5t^3 + 15t^2 + 7t}{t}$$

Determinar el límite de la velocidad cuando t tiende a 1.

- Para calcular el límite se realiza una tabulación evaluando la función con valores de t muy cercanos a 1 por la izquierda y por la derecha, considerando tres decimales para hacer más exacto el cálculo.

t	Valores por la izquierda \rightarrow			1	\leftarrow Valores por la derecha		
$v(t)$	0.997	0.998	0.999	21.5	21.54	21.57	21.61

- Se observa que conforme t se acerca a 1 por la izquierda y por la derecha, $v(t)$ se acerca a 21.5. Por lo tanto, la velocidad del vehículo cuando t tiende a 1 segundo es igual a **21.5 km/h**.



Practica lo aprendido



ESCRIBE la notación matemática de límites de las siguientes expresiones y calcula el límite. Observa el ejemplo.

Expresión	Notación de límite	Límite
8. El límite de $f(x) = \frac{3}{x}$ cuando x tiende a 0 es:	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x}$	No existe
9. El límite de $f(x) = \frac{3}{x+1}$ cuando x tiende 2 es:		
10. El límite de $f(x) = x^2 - 5x + 1$ cuando x tiende a -1 es:		
11. El límite de $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ cuando x tiende a -3 es:		

2.1

Concepto y definición de límite

1 Introducción al concepto de límite

a

COMPLETA las siguientes tablas y determina el límite de las funciones.

1.

Función $f(x) = \frac{x+3}{x}$					
x	Valores por la izquierda →		2	← Valores por la derecha	
	1.7	1.8		1.9	2.1
$f(x)$					

2.

Función $f(x) = \frac{6x+12}{x+3}$					
x	Valores por la izquierda →		4	← Valores por la derecha	
	3.7	3.8		3.9	4.1
$f(x)$					

3.

Función $f(x) = 3x + 2x + 1$					
x	Valores por la izquierda →		12	← Valores por la derecha	
	11.7	11.8		11.9	12.1
$f(x)$					

4.

Función $f(x) = (x)^2 + 3x$					
x	Valores por la izquierda →		5	← Valores por la derecha	
	4.7	4.8		4.9	5.1
$f(x)$					

b

RESUELVE los siguientes problemas:

Las amibas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Esto ocurre más o menos rápidamente, según las condiciones del medio en que se encuentren. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amibas se duplican aproximadamente cada hora. Si inicialmente hay una amiba.

- ¿Cuántas amibas habrá después de 10 horas?
- Un cultivo de bacterias crece según $y = 1 + 2^{\frac{x}{10}}$, donde y equivale a los miles de bacterias y x a las horas.
- ¿Cuántas bacterias habrá después de un día?

La población en miles de insectos en un sembradio está dada por $f(t) = t^2 + 7$. Si t representa el número de días.

- ¿Al cabo de una semana qué cantidad de insectos habrá en el sembradio?

La función $y = 100(0.74)^t$, donde y representa los miligramos y t las horas, determina la concentración de un fármaco en un paciente.

- ¿Qué cantidad de fármaco tiene el paciente al cabo de 6 horas?
- Después de 3 días, ¿qué cantidad de fármaco tiene el paciente?

El costo de producción en una fábrica de juguetes está dado por la función $c(x) = 5\,000 + 8x$, donde x es la cantidad de juguetes que se producen.

- ¿Cuál es el costo de fabricar 1 500 juguetes al día?

NIVEL II

2.1

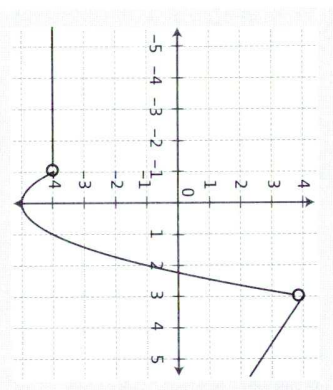
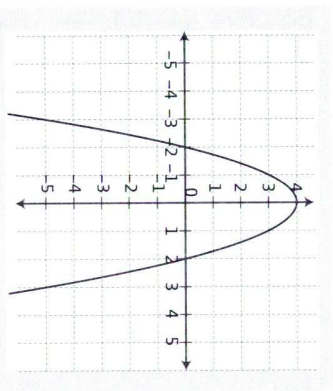
Concepto y definición de límite

2

Límite a partir de la gráfica de una función

a

ANALIZA las gráficas y determina el límite en los puntos solicitados.

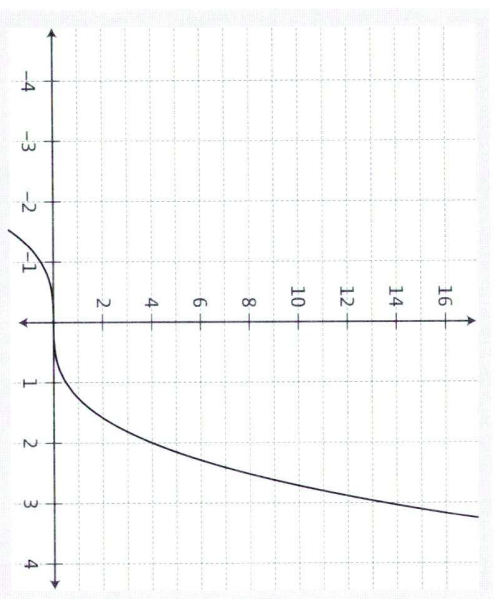


- Límite de la función cuando x tiende a $-3 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-2 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-1 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-0 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $1 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $2 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $3 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-3 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-2 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-1 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $-0 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $1 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $2 =$
- Límite de la función cuando x tiende a $3 =$

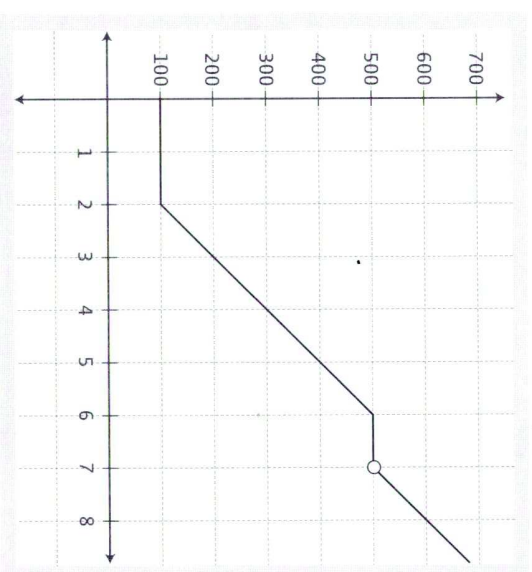
b

RESUELVE los siguientes problemas con base en el análisis de la gráfica.

Un paciente recibe un medicamento por vía intravenosa. La gráfica ilustra la cantidad de medicamento en mililitros que ingresan a su cuerpo por segundo.



- La gráfica representa las ventas por hora que se registraron en un negocio de comida. El límite es la cantidad de pesos que se vendió en x hora.
- ¿Cuánto vendieron durante la primera hora?
 - ¿Cuánto vendieron en la cuarta hora?
 - ¿Cuánto acumularon hasta la hora 6?
 - ¿Cuánto se vendió en la séptima hora?
 - ¿Cuáles fueron las ventas totales del día?



- ¿Cuál es la cantidad de medicamento que tiene el paciente en la sangre a los cero minutos?
- ¿Cuál es la cantidad de medicamento en el paciente después de 1 minuto?
- ¿Cuál es la cantidad de medicamento en el paciente después de 2 minutos?
- ¿Cuál es la cantidad de medicamento en el paciente después de 3 minutos?